Digitale Bibliothek Braunschweig

Rationale Approximation auf der Fläche $x^3 + y^3 + z^3 = 1$

Rieger, Georg Johann

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 36, 1984, S.41-44

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052831

Digitale Bibliothek Braunschweig

Rationale Approximation auf der Fläche $x^3+y^3+z^3=1$

Von **G. J. Rieger,** Hannover

vorgelegt von Th. Kaluza

(Eingegangen am 4.4.1984)

In dieser Arbeit möchte ich einem alten Thema von EULER einen neuen Aspekt abgewinnen.

In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ betrachten wir den Einheitskreis E mit der Gleichung

(1) $\quad \xi^2+\eta^2=1.$

Wir möchten beliebige Punkte von E durch rationale Punkte von E approximieren. Dazu nimmt man die rationale Parametrisierung

$$\xi=\frac{1-\sigma^2}{1+\sigma^2},\ \eta=\frac{2\sigma}{1+\sigma^2} \qquad (\sigma\in\mathbb{R})$$

von $E' := E\setminus(-1,0)$. Zu beliebigem $(\xi,\eta)\in E'$ bestimmt man $\sigma\in\mathbb{R}$ und dazu $\tau\in\mathbb{Q}$ mit Hilfe des Dirichletschen Approximationssatzes, und

$$\left(\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2},\ \frac{2\tau}{1+\tau^2}\right)\in\mathbb{Q}^2\cap E$$

leistet das Gewünschte. So gelangt man zu dem Ergebnis (vgl. [3], S. 127 oder [2], S. 6): *Zu jedem* $N\in\mathbb{N}$ *und jedem* $\xi\in\mathbb{R}$, $\eta\in\mathbb{R}$ *mit* $\xi^2+\eta^2=1$ *gibt es* $x\in\mathbb{Z}$, $y\in\mathbb{Z}$, $z\in\mathbb{N}$ *mit* $x^2+y^2=z^2$ („pythagoräische Tripel"), $z\leqq 2N^2$ *und*

$$\left|\xi-\frac{x}{z}\right|<\frac{\sqrt{8}}{N\sqrt{z}},\ \left|\eta-\frac{y}{z}\right|<\frac{\sqrt{8}}{N\sqrt{z}}.$$

Statt (1) sehen wir uns nach ähnlichen Gleichungen um. Die Gleichung $\xi^3+\eta^3=1$ ist ungeeignet, da sie nach FERMAT außer (1,0) und (0,1) keine rationalen Lösungen hat. Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ wenden wir uns deshalb der durch

(2) $\quad \xi_1^3+\xi_2^3+\xi_3^3=1$

beschriebenen Fläche S zu. Wir möchten beliebige Punkte von S durch rationale Punkte von S approximieren (Satz 1). Zunächst setzen wir

(3) $\quad \xi_1\neq 1,\ \xi_2\neq 1,\ \xi_3\neq 1$

voraus. Für $s\in\mathbb{R}$, $t\in\mathbb{R}$, $h=h(s,t):=3t-s$, $K=K(s,t):=s^2+3t^2$ gilt nach EULER (vgl. etwa [1], S. 199–200 oder [4], Kap. 11) bekanntlich

$$(1+hK)^3+((6t-h)K-1)^3+(K^2+h-6t)^3=(K^2+h)^3,$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052831

Digitale Bibliothek Braunschweig

wie man sofort nachrechnet. Über s,t setzen wir vorübergehend

$$(4)\qquad K^2(s,t)+h(s,t)\neq 0$$

voraus. Für

$$f_1(s,t):=\frac{1+hK}{K^2+h},\quad f_2(s,t):=\frac{(6t-h)K-1}{K^2+h},\quad f_3(s,t):=\frac{K^2+h-6t}{K^2+h}$$

gilt also

$$(5)\qquad f_1^3(s,t)+f_2^3(s,t)+f_3^3(s,t)=1.$$

Im Hinblick auf (2) und (5) möchten wir das System

$$(6)\qquad f_j(s,t)=\xi_j \qquad (j=1,2,3)$$

nach s,t lösen. Wegen $\xi_3\neq 1$ ist darin $t\neq 0$. (6) ist gleichwertig mit

$$(7)\qquad \frac{1+hK}{K^2+h}=\xi_1,\ \frac{6tK}{K^2+h}=\xi_1+\xi_2,\ \frac{6t}{K^2+h}=1-\xi_3.$$

Die zweite und dritte Gleichung daraus ergeben

$$(8)\qquad K=\frac{\xi_1+\xi_2}{1-\xi_3};$$

die erste Gleichung von (7) ergibt

$$(9)\qquad (K-\xi_1)\ h=\xi_1K^2-1;$$

darin ist

$$K-\xi_1=\frac{\xi_2+\xi_1\xi_3}{1-\xi_3}$$

von 0 verschieden, da aus $\xi_2=-\xi_1\xi_3$ wegen (2) sofort

$$(1-\xi_1^3)\ (1-\xi_3^3)=0$$

folgt im Widerspruch zu (3). Aus (8) und (9) folgt

$$h=\frac{\xi_1(\xi_1+\xi_2)^2-(1-\xi_3)^2}{(\xi_2+\xi_1\xi_3)\ (1-\xi_3)}.$$

Wegen (9) gilt

$$K^2+h=\frac{K^3-1}{K-\xi_1}$$

und daher (4), da $K=1$ oder, was nach (8) dasselbe ist, $\xi_1+\xi_2+\xi_3=1$ nach Elimination von ξ_3 aus (2) auf

$$0=(\xi_1+\xi_2)\ (1-\xi_1)\ (1-\xi_2)$$

führt im Widerspruch zu (2) und (3). Die dritte Gleichung von (7) liefert

$$(10)\qquad t=\frac{(\xi_1+\xi_2)^3-(1-\xi_3)^3}{6(\xi_2+\xi_1\xi_3)\ (1-\xi_3)},\quad s=3t-h.$$

Damit ist das System (6) nach s,t gelöst.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052831

Digitale Bibliothek Braunschweig

Es sei $M \in \mathbb{N}$; für beliebige reelle Zahlen s,t und insbesondere für (10) gibt es nach dem Dirichletschen Approximationssatz ganze Zahlen u,v,w mit $0<w \leqq M^2$ und

$$(11) \qquad \left|s-\frac{u}{w}\right|<\frac{1}{Mw}, \quad \left|t-\frac{v}{w}\right|<\frac{1}{Mw}.$$

Es sei

$$(12) \qquad \begin{aligned} x_1 &:= w^4+(3v-u)(u^2+3v^2)w, \\ x_2 &:= (3v+u)(u^2+3v^2)w-w^4, \\ x_3 &:= (u^2+3v^2)^2-(u+3v)w^3, \\ z &:= (u^2+3v^2)^2+(3v-u)w^3. \end{aligned}$$

Also ist

$$(13) \qquad z=w^4\left(K^2\left(\frac{u}{w},\frac{v}{w}\right)+h\left(\frac{u}{w},\frac{v}{w}\right)\right);$$

für große M ist wegen (4) und (11) also

$$(14) \qquad z \neq 0.$$

Es folgt sofort

$$(15) \qquad \frac{x_j}{z}=f_j\left(\frac{u}{w},\frac{v}{w}\right) \qquad (j=1,2,3)$$

und daraus als homogenisierte Form von (5) noch

$$(16) \qquad x_1^3+x_2^3+x_3^3=z^3.$$

In $\mathbb{R}^3$ bezeichne T die Ebene $\eta_1+\eta_2+\eta_3=0$. Senkrecht über jedem Punkt von T liegt genau ein Punkt von S; denn:

$$\begin{aligned} \lambda \longmapsto\ & (\eta_1+\lambda)^3+(\eta_2+\lambda)^3+(\eta_3+\lambda)^3 \\ =\ & \eta_1^3+\eta_2^3+\eta_3^3+3(\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2)\lambda+3\lambda^3 \end{aligned}$$

ist eine wachsende Funktion von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ und nimmt somit den Wert 1 genau einmal an. S ist also eine analytische Fläche, die man sich durch Verbiegen von T vorstellen kann. Für $\xi_j=1$ beschreibt (2) in $\mathbb{R}^3$ eine Gerade $(j=1,2,3)$, welche in der zu T parallelen Ebene $\xi_1+\xi_2+\xi_3=1$ liegt; diese 3 Geraden bestimmen das gleichseitige Dreieck $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$. Durch Wegnehmen dieser Geraden zerfällt S in genau 7 einfachzusammenhängende, offene Flächenstücke, deren Vereinigung wir mit S' bezeichnen.

Eine zur abgeschlossenen Kreisscheibe vom Radius 1 homöomorphe Teilmenge von S' heißt eine Scheibe von S'.

Satz 1. *Für jede Scheibe* V *von* S' *gibt es natürliche Zahlen* M_V, C_V *derart, daß für jede natürliche Zahl* $M>M_V$ *und jedes* $(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in V$ *es ganze Zahlen* x_1,x_2,x_3,z *gibt mit* $0<|z| \leqq M^8$, (16) *und*

$$\left|\xi_j-\frac{x_j}{z}\right|<C_V M^{-1}|z|^{-\frac{1}{4}} \qquad (j=1,2,3).$$

Beweis. Es sei $M \in \mathbb{N}$, $(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in V$. Wir bestimmen s,t gemäß (10), außerdem u,v,w gemäß (11) und schließlich x_1,x_2,x_3,z gemäß (12). Wegen der Überlegungen bei

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052831

Digitale Bibliothek Braunschweig

(14) und wegen der Kompaktheit von V gibt es ein $M_V \in \mathbb{N}$ derart, daß für $M > M_V$ gilt $z \neq 0$. Wegen (6), (15) ist

$$\xi_j - \frac{x_j}{z} = f_j(s,t) - f_j\left(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right) \qquad (j = 1,2,3).$$

Darauf wenden wir den Mittelwertsatz an und beachten (11). Wegen (13), (14) und der Kompaktheit von V sind alle auftretenden Ableitungen gleichmäßig beschränkt. Es gibt also ein $C'_V \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\xi_j - \frac{x_j}{z}\right| < \frac{C'_V}{Mw} \qquad (j = 1,2,3).$$

Mit s,t sind wegen (11) auch $\frac{u}{w}$, $\frac{v}{w}$ gleichmäßig beschränkt. Wegen

$$z = \left(\left(\frac{u}{w}\right)^2 + 3\left(\frac{v}{w}\right)^2\right)^2 w^2 + \left(\frac{3v}{w} - \frac{u}{w}\right) w^4$$

gibt es also ein $C''_V \in \mathbb{N}$ mit $|z| < (C''_V\, w)^4$. Mit $C_V := C'_V\, C''_V$ folgt die Behauptung.

Die rationale Parameterdarstellung (5) von S bezeichnen wir mit $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$; f^{-1} ist dann durch (10) gegeben. Das bisherige Vorgehen läßt sich so zusammenfassen: Es sei $P \in S$; auf $f^{-1}(P) \in \mathbb{R}^2$ wenden wir den Dirichletschen Approximationssatz an und gehen mittels f zurück nach S.

$\mathbb{Q}^3 \cap S$ ist überall dicht in S; denn für S′ folgt das aus Satz 1, und für die 3 Geraden, aus denen $S \setminus S'$ besteht, ist das klar.

Vermöge

$$y_1 = \frac{x_2+x_1}{2},\; y_2 = \frac{x_2-x_1}{2},\; y_3 = \frac{z-x_3}{2},\; y_4 = \frac{z+x_3}{2}$$

geht (16) über in

$$y_1(y_1^2+3y_2^2) = y_3(y_3^2+3y_4^2).$$

Allgemeiner kann man nach dem Vorbild von Satz 1 statt der Fläche (2) und der diophantischen Gleichung (16) jetzt für beliebiges $p \in \mathbb{N}$ die durch $\eta_3 = 1$ (oder $\eta_4 = 1$) aus

$$\eta_1(\eta_1^2 + p\,\eta_2^2) = \eta_3(\eta_3^2 + p\,\eta_4^2)$$

in $\mathbb{R}^3$ entstehende Fläche und die diophantische Gleichung

$$y_1(y_1^2 + p\,y_2^2) = y_3(y_3^2 + p\,y_4^2)$$

behandeln. Insbesondere verläuft der arithmetische Teil der Überlegungen nach dem erwähnten Vorbild von Euler mit p statt 3.

Literatur

[1] G.H. HARDY – E.M. WRIGHT: In Introduction to the Theory of Numbers, Oxford 1954.

[2] Edmund HLAWKA: Approximation von Irrationalzahlen und pythagoräische Tripel. Bonner Mathematische Schriften, Sonderband Nr. 121, 1–32, 1980.

[3] Edmund HLAWKA: Theorie der Gleichverteilung, Mannheim–Wien–Zürich 1979, S. 126 bis 131.

[4] L.J. MORDELL: Diophantine equations, London–New York 1969.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052831